COGNOME .... NOME .... Matricola .... Corso Prof. ....

VOTO TEST ....

Esame di ANALISI MATEMATICA I - 11 Febbraio 2011, ore 8.30

A

ESERCIZIO 1. (8 punti) Data la funzione $f(x) = \sqrt{1+\sin x} - \frac{2}{2-x}$

(a) determinare lo sviluppo di MacLaurin al terzo ordine della funzione $f(x)$;

(b) determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ rispetto al campione x per $x \to 0$;

(c) studiare la convergenza dell'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x$.

ESERCIZIO 2. (10 punti) Si consideri la funzione $f(x) = x^3 e^{-\left|\frac{x}{x+1}\right|}$.

(a) Determinare il dominio di $f(x)$, trovare i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti.

(b) Studiare la derivabilità della funzione nel suo dominio e scrivere, dove esiste, la derivata.

(c) Dire se è possibile estendere per continuità la funzione nel punto $x = -1$ e, nel caso affermativo, studiare la derivabilità in tale punto.

(d) Determinare gli intervalli di monotonia di $f(x)$ e gli eventuali punti di massimo e minimo locale e assoluto.

(d) Tracciare il grafico qualitativo di $f(x)$ utilizzando le informazioni ricavate nei punti precedenti.

QUESITO 1. (6 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in 0 e tale che $f(0) = 1$ e $f'(0) = -1$.

(a) Si dica quali delle seguenti funzioni sono derivabili in 0 ed in caso affermativo se ne calcoli la derivata:

$$f(x) - x\,, \quad (f(\sin x))^2\,, \quad |x|f(x)\,, \quad |f(x)|$$

(b) Si può dire qualcosa della derivabilità in 0 della funzione $f(\cos x)$?

QUESITO 2 (6 punti)

(a) Data una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile, si definisca la media integrale di f sull'intervallo $[a,b]$.

(b) Si enunci e si dimostri il teorema della media integrale.

COGNOME .... NOME .... Matricola .... Corso Prof. ....

VOTO TEST ....

Esame di ANALISI MATEMATICA I - 11 Febbraio 2011, ore 8.30

B

ESERCIZIO 1. (8 punti) Data la funzione $f(x) = \sqrt[3]{1+\sin x} - \frac{3}{3-x}$

(a) determinare lo sviluppo di MacLaurin al terzo ordine della funzione $f(x)$;

(b) determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ rispetto al campione x per $x \to 0$;

(c) studiare la convergenza dell'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x$.

ESERCIZIO 2. (10 punti) Si consideri la funzione $f(x) = (x-1)^3 e^{-\left|\frac{x-1}{x}\right|}$.

(a) Determinare il dominio di $f(x)$, trovare i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti.

(b) Studiare la derivabilità della funzione nel suo dominio e scrivere, dove esiste, la derivata.

(c) Dire se è possibile estendere per continuità la funzione nel punto $x = 0$ e, nel caso affermativo, studiare la derivabilità in tale punto.

(d) Determinare gli intervalli di monotonia di $f(x)$ e gli eventuali punti di massimo e minimo locale e assoluto.

(d) Tracciare il grafico qualitativo di $f(x)$ utilizzando le informazioni ricavate nei punti precedenti.

QUESITO 1. (6 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in 0 e tale che $f(0) = 1$ e $f'(0) = -1$.

(a) Si dica quali delle seguenti funzioni sono derivabili in 0 ed in caso affermativo se ne calcoli la derivata:

$$f(x) + x\,, \quad \left(f(e^x - 1)\right)^2\,, \quad \sqrt[3]{x}f(x)\,, \quad \sqrt[3]{f(x)}$$

(b) Si può dire qualcosa della derivabilità in 0 della funzione $f(e^x)$?

QUESITO 2 (6 punti)

(a) Data una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile, si definisca la media integrale di f sull'intervallo $[a,b]$.

(b) Si enunci e si dimostri il teorema della media integrale.

COGNOME .... NOME .... Matricola .... Corso Prof. ....

VOTO TEST ....

Esame di ANALISI MATEMATICA I - 11 Febbraio 2011, ore 8.30

C

ESERCIZIO 1. (8 punti) Data la funzione $f(x) = \sqrt[4]{1+\sin x} - \frac{4}{4-x}$

(a) determinare lo sviluppo di MacLaurin al terzo ordine della funzione $f(x)$;

(b) determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ rispetto al campione x per $x \to 0$;

(c) studiare la convergenza dell'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x$.

ESERCIZIO 2. (10 punti) Si consideri la funzione $f(x) = x^3 e^{-\left|\frac{x}{1-x}\right|}$.

(a) Determinare il dominio di $f(x)$, trovare i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti.

(b) Studiare la derivabilità della funzione nel suo dominio e scrivere, dove esiste, la derivata.

(c) Dire se è possibile estendere per continuità la funzione nel punto $x = 1$ e, nel caso affermativo, studiare la derivabilità in tale punto.

(d) Determinare gli intervalli di monotonia di $f(x)$ e gli eventuali punti di massimo e minimo locale e assoluto.

(d) Tracciare il grafico qualitativo di $f(x)$ utilizzando le informazioni ricavate nei punti precedenti.

QUESITO 1. (6 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in 0 e tale che $f(0) = 1$ e $f'(0) = -1$.

(a) Si dica quali delle seguenti funzioni sono derivabili in 0 ed in caso affermativo se ne calcoli la derivata:

$$x - f(x)\,, \quad (f(1-\cos x))^3\,, \quad |x|f(x)\,, \quad |f(x)|$$

(b) Si può dire qualcosa della derivabilità in 0 della funzione $f(\cos^2 x)$?

QUESITO 2 (6 punti)

(a) Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile, si definisca la media integrale di f sull'intervallo $[a, b]$.

(b) Si enunci e si dimostri il teorema della media integrale.

COGNOME .... NOME .... Matricola .... Corso Prof. ....

VOTO TEST ....

Esame di ANALISI MATEMATICA I - 11 Febbraio 2011, ore 8.30

D

ESERCIZIO 1. (8 punti) Data la funzione $f(x) = \sqrt[5]{1+\sin x} - \frac{5}{5-x}$

(a) determinare lo sviluppo di MacLaurin al terzo ordine della funzione $f(x)$;

(b) determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ rispetto al campione x per $x \to 0$;

(c) studiare la convergenza dell'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x$.

ESERCIZIO 2. (10 punti) Si consideri la funzione $f(x) = (x+1)^3 e^{-\left|\frac{x+1}{x}\right|}$.

(a) Determinare il dominio di $f(x)$, trovare i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti.

(b) Studiare la derivabilità della funzione nel suo dominio e scrivere, dove esiste, la derivata.

(c) Dire se è possibile estendere per continuità la funzione nel punto $x = 0$ e, nel caso affermativo, studiare la derivabilità in tale punto.

(d) Determinare gli intervalli di monotonia di $f(x)$ e gli eventuali punti di massimo e minimo locale e assoluto.

(d) Tracciare il grafico qualitativo di $f(x)$ utilizzando le informazioni ricavate nei punti precedenti.

QUESITO 1. (6 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in 0 e tale che $f(0) = 1$ e $f'(0) = -1$.

(a) Si dica quali delle seguenti funzioni sono derivabili in 0 ed in caso affermativo se ne calcoli la derivata:

$$x^2 + f(x)\,, \quad (f(\sinh x))^2\,, \quad \sqrt[3]{x} f(x)\,, \quad \sqrt[3]{f(x)}$$

(b) Si può dire qualcosa della derivabilità in 0 della funzione $f(e^{2x})$?

QUESITO 2 (6 punti)

(a) Data una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile, si definisca la media integrale di f sull'intervallo $[a,b]$.

(b) Si enunci e si dimostri il teorema della media integrale.

COGNOME .... NOME .... Matricola .... Corso Prof. ....

VOTO TEST ....

Esame di ANALISI MATEMATICA I - 11 Febbraio 2011, ore 11

A

Esercizio 1. (10 punti) Si consideri la funzione $f(x) = \frac{|x|}{2} + \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

(a) Determinare il dominio di $f(x)$, trovare i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti.

(b) Studiare la derivabilità della funzione nel suo dominio e scrivere, dove esiste, la derivata.

(c) Determinare gli intervalli di monotonia di $f(x)$ e gli eventuali punti di massimo e minimo locale e assoluto.

(d) Determinare gli intervalli di convessità e gli eventuali flessi della funzione.

(e) Tracciare il grafico qualitativo di $f(x)$ utilizzando le informazioni ricavate nei punti precedenti.

Esercizio 2. (8 punti) Si consideri il problema di Cauchy $y' = \frac{y^2 + y - 2}{6\sqrt{x+1}}$, $y(0) = a$ dove a è un parametro reale.

(a) determinare i valori di a per cui il problema di Cauchy ha soluzione costante;

(b) per $a = 0$ determinare la soluzione del problema di Cauchy;

(c) Sia $y(x)$ la soluzione trovata al punto (b). Calcolare $y'(0)$.

Quesito 1. (6 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ tale che $f(x) = -x^4 + \frac{1}{16}x^5 + o(x^5)$ per $x \to 0$. Sia $g(x) = f(2x)$.

(a) Calcolare le derivate $g^{(k)}(0)$ per $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Giustificare il procedimento seguito.

(b) Stabilire se $x_0 = 0$ è un punto di estremo per g e, in caso affermativo, studiarne la natura. Giustificare il procedimento seguito.

(c) Si può dire qualcosa del comportamento di g nel punto $x_0 = \frac{3}{4}$? Motivare la risposta.

Quesito 2. (6 punti)

(a) Dare la definizione di funzione crescente e strettamente crescente su di un intervallo I.

(b) Enunciare i risultati che, per funzioni derivabili, collegano la proprietà di crescenza e stretta crescenza al segno della derivata.

(c) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e crescente su $\mathbb{R}$. Si mostri che anche $f(e^x + x^3)$ è crescente su $\mathbb{R}$.

COGNOME .... NOME .... Matricola .... Corso Prof. ....

VOTO TEST ....

Esame di ANALISI MATEMATICA I - 11 Febbraio 2011, ore 11

B

Esercizio 1. (10 punti) Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{|x|}{2} + \arctan\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

(a) Determinare il dominio di $f(x)$, trovare i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti.

(b) Studiare la derivabilità della funzione nel suo dominio e scrivere, dove esiste, la derivata.

(c) Determinare gli intervalli di monotonia di $f(x)$ e gli eventuali punti di massimo e minimo locale e assoluto.

(d) Determinare gli intervalli di convessità e gli eventuali flessi della funzione.

(e) Tracciare il grafico qualitativo di $f(x)$ utilizzando le informazioni ricavate nei punti precedenti.

Esercizio 2. (8 punti) Si consideri il problema di Cauchy $y' = \dfrac{y^2+y-6}{10\sqrt{x+1}}$, $y(0) = a$ dove a è un parametro reale.

(a) determinare i valori di a per cui il problema di Cauchy ha soluzione costante;

(b) per $a = 0$ determinare la soluzione del problema di Cauchy;

(c) Sia $y(x)$ la soluzione trovata al punto (b). Calcolare $y'(0)$.

Quesito 1. (6 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ tale che $f(x) = 2x^4 - \frac{1}{8}x^5 + o(x^5)$ per $x \to 0$. Sia $g(x) = f(2x)$.

(a) Calcolare le derivate $g^{(k)}(0)$ per $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Giustificare il procedimento seguito.

(b) Stabilire se $x_0 = 0$ è un punto di estremo per g e, in caso affermativo, studiarne la natura. Giustificare il procedimento seguito.

(c) Si può dire qualcosa del comportamento di g nel punto $x_0 = \frac{3}{4}$? Motivare la risposta.

Quesito 2. (6 punti)

(a) Dare la definizione di funzione decrescente e strettamente decrescente su di un intervallo I.

(b) Enunciare i risultati che, per funzioni derivabili, collegano la proprietà di decrescenza e stretta decrescenza al segno della derivata.

(c) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e decrescente su $\mathbb{R}$. Si mostri che anche $f(x + \arctan x)$ è decrescente su $\mathbb{R}$.

COGNOME .... NOME .... Matricola .... Corso Prof. ....

VOTO TEST ....

Esame di ANALISI MATEMATICA I - 11 Febbraio 2011, ore 11

C

Esercizio 1. (10 punti) Si consideri la funzione $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{1-x}\right) - \frac{|x|}{2}$.

(a) Determinare il dominio di $f(x)$, trovare i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti.

(b) Studiare la derivabilità della funzione nel suo dominio e scrivere, dove esiste, la derivata.

(c) Determinare gli intervalli di monotonia di $f(x)$ e gli eventuali punti di massimo e minimo locale e assoluto.

(d) Determinare gli intervalli di convessità e gli eventuali flessi della funzione.

(e) Tracciare il grafico qualitativo di $f(x)$ utilizzando le informazioni ricavate nei punti precedenti.

Esercizio 2. (8 punti) Si consideri il problema di Cauchy $y' = \frac{y^2+2y-3}{8\sqrt{x+1}}$, $y(0) = a$ dove a è un parametro reale.

(a) determinare i valori di a per cui il problema di Cauchy ha soluzione costante;

(b) per $a = 0$ determinare la soluzione del problema di Cauchy;

(c) Sia $y(x)$ la soluzione trovata al punto (b). Calcolare $y'(0)$.

Quesito 1. (6 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ tale che $f(x) = x^4 + \frac{1}{4}x^5 + o(x^5)$ per $x \to 0$. Sia $g(x) = f(2x)$.

(a) Calcolare le derivate $g^{(k)}(0)$ per $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Giustificare il procedimento seguito.

(b) Stabilire se $x_0 = 0$ è un punto di estremo per g e, in caso affermativo, studiarne la natura. Giustificare il procedimento seguito.

(c) Si può dire qualcosa del comportamento di g nel punto $x_0 = \frac{3}{4}$? Motivare la risposta.

Quesito 2. (6 punti)

(a) Dare la definizione di funzione crescente e strettamente crescente su di un intervallo I.

(b) Enunciare i risultati che, per funzioni derivabili, collegano la proprietà di crescenza e stretta crescenza al segno della derivata.

(c) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e crescente su $\mathbb{R}$. Si mostri che anche $f(x^3 + \sinh x)$ è crescente su $\mathbb{R}$.

COGNOME .... NOME .... Matricola .... Corso Prof. ....

VOTO TEST ....

Esame di ANALISI MATEMATICA I - 11 Febbraio 2011, ore 11

D

Esercizio 1. (10 punti) Si consideri la funzione $f(x) = \arctan\left(\frac{-x}{x+1}\right) - \frac{|x|}{2}$.

(a) Determinare il dominio di $f(x)$, trovare i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti.

(b) Studiare la derivabilità della funzione nel suo dominio e scrivere, dove esiste, la derivata.

(c) Determinare gli intervalli di monotonia di $f(x)$ e gli eventuali punti di massimo e minimo locale e assoluto.

(d) Determinare gli intervalli di convessità e gli eventuali flessi della funzione.

(e) Tracciare il grafico qualitativo di $f(x)$ utilizzando le informazioni ricavate nei punti precedenti.

Esercizio 2. (8 punti) Si consideri il problema di Cauchy $y' = \frac{y^2 - 3y - 4}{8\sqrt{x+1}}$, $y(0) = a$ dove a è un parametro reale.

(a) determinare i valori di a per cui il problema di Cauchy ha soluzione costante;

(b) per $a = 0$ determinare la soluzione del problema di Cauchy;

(c) Sia $y(x)$ la soluzione trovata al punto (b). Calcolare $y'(0)$.

Quesito 1. (6 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ tale che $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + x^5 + o(x^5)$ per $x \to 0$. Sia $g(x) = f(2x)$.

(a) Calcolare le derivate $g^{(k)}(0)$ per $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Giustificare il procedimento seguito.

(b) Stabilire se $x_0 = 0$ è un punto di estremo per g e, in caso affermativo, studiarne la natura. Giustificare il procedimento seguito.

(c) Si può dire qualcosa del comportamento di g nel punto $x_0 = \frac{3}{4}$? Motivare la risposta.

Quesito 2. (6 punti)

(a) Dare la definizione di funzione decrescente e strettamente decrescente su di un intervallo I.

(b) Enunciare i risultati che, per funzioni derivabili, collegano la proprietà di decrescenza e stretta decrescenza al segno della derivata.

(c) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e decrescente su $\mathbb{R}$. Si mostri che anche $f(e^x + x^5)$ è decrescente su $\mathbb{R}$.